

УДК 531.39

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

*Ю.П. Артюхин*

### Аннотация

В статье предложен аналитический метод упругого расчета криволинейных стержней двойкой кривизны с использованием начальных параметров, пригодный для произвольных углов поворота и перемещений.

**Ключевые слова:** упругость, двойная кривизна, начальный параметр, большие прогибы.

---

### Введение

Теория тонких стержней начала разрабатываться еще в середине XIX в. в трудах Киргофа и Клебша. Киргофом была получена система дифференциальных уравнений малых деформаций тонких стержней, а Клебшем – система уравнений совместности перемещений и параметров деформаций. Теория Киргофа–Клебша изложена в [1]. Позже уравнения Киргофа–Клебша были представлены Лурье в векторной форме [2]. Произвольные перемещения (эластика) стержня под действием сосредоточенной силы впервые исследовал Эйлер (1774 г.), который получил решение в виде эллиптических интегралов [3]. В книгах Светлицкого [4–6] излагаются основы теории стержневых конструкций, применяемых в машиностроении, при расчете на прочность, устойчивость в линейной и нелинейной постановках. Макушиным рассмотрены вопросы устойчивости стержней [7], а Товстиком – колебания пружин [8]. Специальная литература посвящена статике и динамике винтовых цилиндрических пружин [9]. Основное допущение теории тонких пространственных стержней – отсутствие продольных деформаций.

Филиным [10] предложен дискретный метод нахождения усилий и перемещений в стержне с произвольным очертанием его оси на основе метода начальных параметров. По сути он представляет собой метод конечных элементов в сочетании с методом начальных параметров и позволяет решать как линейные, так и нелинейные задачи.

В настоящей работе предложен аналогичный метод начальных параметров для балочных элементов стержня, только в аналитической форме, который затем применен к линейным и нелинейным проблемам. Криволинейный стержень заменяется конструкцией, составленной из прямолинейных стержней, то есть кривая, описывающая стержень, заменяется ломаной. Достоинством такого подхода является меньшее число алгебраических уравнений, к которому сводится решаемая задача, по сравнению с методом конечных элементов. Оно совпадает с числом граничных условий для элемента и не возрастает с увеличением количества звеньев в ломаной. Рассмотрены примеры расчета плоского и пространственного деформирования стержней в линейной и нелинейной постановках. Решена задача о сворачивании

моментом тонкой пластины в цилиндрическую оболочку. Даны точное и приближенное решения этой задачи. Установлена математическая аналогия между этой задачей и задачей о качении цилиндра по горизонтальной плоскости. Выведена формула кривизны плоской деформированной кривой в лагранжевой системе координат.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим упругую (в рамках закона Гука) деформацию пространственного стержня под действием произвольных нагрузок. Геометрию стержня будем задавать произвольной осевой линией  $L$ , проходящей через центр тяжести сечения. Положение произвольной точки  $M_0$  на оси стержня будем определять параметром  $s$  – длиной дуги стержня от начала отсчета. Введем в точке  $M_0$  подвижные декартовы оси координат с единичными ортами (основной естественный трехгранник):  $\bar{e}_{10}$  – касательный вектор к кривой  $L$ ,  $\bar{e}_{20}$  – главная нормаль кривой и бинормаль  $\bar{e}_{30}$ . Произвольная пространственная кривая  $L$  является кривой двоякой кривизны, состоящей из кривизны кривой  $k_{10}$  и кручения  $k_{20}$ :

$$k_{10} = \left| \frac{d\bar{e}_{10}}{ds} \right|, \quad k_{20} = \left| \frac{d\bar{e}_{30}}{ds} \right|, \quad (1.1)$$

для которых имеют место формулы Френе – Серре:

$$\frac{d\bar{e}_{10}}{ds} = k_{10}\bar{e}_{20}, \quad \frac{d\bar{e}_{20}}{ds} = -k_{10}\bar{e}_{10} + k_{20}\bar{e}_{30}, \quad \frac{d\bar{e}_{30}}{ds} = -k_{20}\bar{e}_{20}. \quad (1.2)$$

Изучая стержень в целом, необходимо ввести оси, жестко связанные с его поперечным сечением. Пусть такие оси  $x_0, y_0, z_0$  (главный трехгранник) проходят по главным центральным осям инерции поперечного сечения стержня, причем ось  $x_0$  совпадает с направлением касательной к оси стержня, а ось  $z_0$  образует с главной нормалью  $\bar{e}_{20}$  угол  $\varphi_0$ . Индекс 0 соответствует геометрии недеформированного стержня.

Геометрия пространственной осевой линии описывается в некоторой неподвижной декартовой системе координат с помощью движения основного трехгранника путем поступательного и вращательного перемещений. Вращательное перемещение задается вектором Дарбу:

$$\bar{\omega} = k_{20}\bar{e}_{10} + k_{10}\bar{e}_{30}. \quad (1.3)$$

Положение естественных осей полностью определяют геометрию стержня как функцию от длины дуги  $s$ . Имеет место аналогия Кирхгофа: если двигать трехгранник с постоянной скоростью, равной единице, то вектор Дарбу – мгновенная угловая скорость вращения трехгранника вокруг начала координат, а поэтому уравнения движения этих осей подчиняются закону движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Причем компоненты угловой скорости дают соответствующие кривизны стержня.

Если учесть не совпадение основных и главных осей, то вектор поворота примет вид:

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \frac{d\varphi_0}{ds} \bar{e}_{10} = \left( k_{20} + \frac{d\varphi_0}{ds} \right) \bar{e}_{10} + k_{10}\bar{e}_{30} = k_{x0}\bar{e}_{x0} + k_{y0}\bar{e}_{y0} + k_{z0}\bar{e}_{z0}, \quad (1.4)$$

где

$$k_{x0} = k_{20} + \frac{d\varphi_0}{ds}, \quad k_{y0} = k_{10} \sin \varphi_0, \quad k_{z0} = k_{10} \cos \varphi_0. \quad (1.5)$$

Указанные величины в теории поверхностей называются следующим образом:  $k_{x0}$  – геодезическое кручение,  $k_{y0}$  – геодезическая кривизна,  $k_{z0}$  – нормальная кривизна пространственной кривой на поверхности с нормалью  $\bar{e}_{z0}$ . Через  $\bar{e}_{x0}$ ,  $\bar{e}_{y0}$ ,  $\bar{e}_{z0}$  обозначены орты главного трехгранника в недеформированном стержне.

Предполагается, что деформация стержня описывается гипотезой плоских сечений Бернулли. В результате деформаций точка  $M_0$  получит вектор перемещения  $\bar{U}(u, v, w)$  и перейдет в точку  $M$ , а главный триэдр  $x_0, y_0, z_0$  займет положение  $x, y, z$  и повернется на угол с матрицей преобразования

$$\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \varphi \sin \psi, & \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi, & -\cos \varphi \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \theta & \cos \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \psi + \sin \theta \sin \varphi \cos \psi, & \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi, & \cos \varphi \cos \psi \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Матрица (1.6) получена последовательным поворотом на угол  $\varphi$  вокруг орта  $\bar{e}_{x0}$ , поворотом вокруг нового положения орта  $\bar{e}_{z0}$  на угол  $\theta$  до совмещения с ортом  $\bar{e}_y$  и поворотом вокруг  $\bar{e}_{y0} = \bar{e}_y$  на угол  $\psi$ . Здесь  $\bar{e}_x(s)$ ,  $\bar{e}_y(s)$ ,  $\bar{e}_z(s)$  – орты главного трехгранника в деформированном стержне. Матрица (1.6) описывает произвольные повороты, осуществляющие переход от главных осей недеформированного состояния к главным осям деформированного состояния  $x, y, z$ , ее вид свидетельствует о нелинейности задачи. При малых углах поворота матрица линеаризуется и переходит в следующую:

$$[l_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & \theta & -\psi \\ -\theta & 1 & \varphi \\ \psi & -\varphi & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Считая осевую линию нерастяжимой, запишем уравнения равновесия в векторной форме [4, 5]:

$$\frac{d\bar{Q}}{ds} + \bar{q} = 0, \quad \frac{d\bar{M}}{ds} + [\bar{e}_x, \bar{Q}] + \bar{m} = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{d\bar{U}}{ds} = (1 - l_{11})\bar{e}_x - l_{21}\bar{e}_y - l_{31}\bar{e}_z, \quad (1.9)$$

где  $\bar{Q}(T, Q_y, Q_z)$ ,  $\bar{M}(H, M_y, M_z)$  – векторы внутренних усилий и моментов,  $T$  – продольное усилие,  $Q_y, Q_z$  – поперечные силы,  $H$  – крутящий момент,  $M_y, M_z$  – изгибающие моменты,  $\bar{q}, \bar{m}$  – внешние нагрузки и моменты,  $l_{ij} = l_{ij}(\varphi, \theta, \psi)$  – косинусы матрицы перехода от недеформированных осей к деформированным осям. Уравнения (1.8), (1.9) включают в себя девять скалярных уравнений и содержат двенадцать неизвестных, поэтому их необходимо дополнить тремя соотношениями упругости:

$$H = D_k(k_x - k_{x0}), \quad M_y = D_y(k_y - k_{y0}), \quad M_z = D_z(k_z - k_{z0}), \quad (1.10)$$

где  $D_k = GI_k$  – крутильная жесткость,  $D_{y,z} = EI_{y,z}$  – изгибные жесткости,  $k_x, k_y, k_z$  – кривизны после деформации, являющиеся нелинейными функциями углов  $\varphi, \theta, \psi$ . При произвольных перемещениях стержня нагрузки также изменяются. При этом следует различать «мертвую» нагрузку, сохраняющую свое направление при деформации, и следящую нагрузку, жестко связанную со стержнем.

В работе [10] предлагается решение линейной задачи с учетом осевой и поперечной деформаций стержня, полученное при помощи дискретной матричной формы метода начальных параметров. Решение сведено к интегрированию системы дифференциальных уравнений с 18 неизвестными.

Для больших углов поворота в плоской задаче существует математическая аналогия задач изгиба стержня силой и моментом с задачей больших колебаний физического маятника.

Итак, видно, что различные нелинейные задачи статики тонких стержней (в предположении произвольности углов поворота) с математической точки зрения эквивалентны соответствующим различным нелинейным задачам динамики абсолютно твердого тела. Поэтому трудность получения точных решений нелинейных уравнений Киргофа–Клебша при изгибе и кручении стержней такого же порядка, что и при решении динамических уравнений Эйлера для вращения твердого тела вокруг неподвижной точки. Получение закона вращения тела ограничено только нахождением закона движения трехгранника, а в задаче для стержня добавляется отыскание упругой линии.

## 2. Метод решения

Для исследования деформаций криволинейного пространственного стержня предлагается заменить исходную математическую модель на более простую, состоящую из элементов, решение которых известно: заменим пространственный стержень набором жестко сопряженных плоских балок, которые деформируются в условиях сложного изгиба и кручения. Перемещения каждого балочного элемента будем записывать аналитически в виде полиномов. Эти перемещения являются точными решениями линейной задачи изгиба балки. По сути это – метод конечных элементов в сочетании с методом начальных параметров, но не численный, а аналитический. В узлах нужно записать условия сопряжения. В качестве неизвестных принимаются начальные параметры на одном конце балки и далее методом прогонки эти неизвестные переводятся на другой конец пространственного стержня. Причем увеличение разбиения на элементы не приводит к увеличению порядка системы алгебраических уравнений.

Описание геометрии пространственного стержня будем проводить в неподвижных глобальных декартовых координатах  $X, Y, Z$ , начало которых поместим в левую опору стержня. Разобьем пространственный стержень на  $n$  прямолинейных стержней. С каждым стержнем свяжем локальную центральную систему координат  $x, y, z$ , причем ось  $x$  направим по длине балки. Перемещения произвольной точки балки в этих осях обозначим через  $u, v, w$ . Кроме того, стержень получит кручение, определяемое углом закручивания  $\varphi$  вдоль оси  $x$ . Концы стержня примем за узлы, геометрия которых при малых перемещениях определяется геометрией первоначальной конфигурации. Если стержень испытывает большие перемещения, то координаты узлов заранее неизвестны. Перемещения и угол закручивания для каждой балки имеют вид [11]:

$$u(x) = u_0 + \frac{T_0}{B}x - \frac{q_x}{2B}x^2 + \frac{q_{x2}}{2B} \left[ (b-x)^2 \theta(x-b) - (a-x)^2 \theta(x-a) \right] - \frac{P_x}{B} (x-t) \theta(x-t), \quad (2.1)$$

$$w(x) = w_0 + t_0 x - \frac{M_{y0}}{2D_y} x^2 - \frac{Q_{z0}}{6D_y} x^3 + \frac{q_z}{24D_y} x^4 - \frac{P_z}{6D_y} (a-x)^3 \theta(x-a) + \frac{m_y}{2D_y} (b-x)^2 \theta(x-b) + \frac{q_{z2}}{24D_y} \left[ (x-c)^4 \theta(x-c) - (x-g)^4 \theta(x-g) \right], \quad (2.2)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{H}{D_k} x, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.3)$$

Здесь величины с индексом 0 соответствуют начальным параметрам балки длины  $L$ ,  $q_x$ ,  $q_z$  – распределенные нагрузки,  $P_x$ ,  $P_z$ ,  $m_y$  – сосредоточенные нагрузки,  $\theta(x-t)$  – единичная функция Хевисайда;  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $g$ ,  $t$  – точки приложения и исчезания нагрузок. Перемещение балки  $v(x)$  по оси  $y$  можно получить из (2.2), произведя следующую замену переменных:  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow y$ ,  $w_0 \rightarrow v_0$ .

Каждый элемент балки стягивает некоторый криволинейный отрезок реального стержня, поэтому этот криволинейный отрезок обладает свойствами пологости кривой по отношению к стягивающей ее прямой  $s \approx x$ . Отсюда вытекает, что статико-геометрические характеристики деформированной балки будут незначительно отличаться от таких же характеристик криволинейного стержня.

Важно знать значения неизвестных начальных параметров на левой опоре стержня. Формулы (2.1)–(2.3) позволяют подсчитать значения статических и геометрических характеристик балки на конце  $x = L$  и с учетом поворота локальных осей следующей балки сформировать ее начальные параметры, выраженные через неизвестные начальные параметры опорной балки. Таким образом, можно организовать «прогонку» этих параметров на правый конец всего стержня, то есть эти неизвестные начальные параметры на левых концах выражаются через начальные параметры на правых концах последовательно для всех элементов ломаной. Далее следует поставить граничные условия на правом конце криволинейного стержня для их определения. Тогда задача будет полностью решена. Так обстоят дела со стратегией расчета линейных задач.

В нелинейных задачах необходимо разбивать нагрузку на малые, но конечные значения. Пользуясь тем, что в пределах этих приращений нагрузки можно воспользоваться стратегией решения линейных задач, итерируя решения до истинного значения нагрузки.

Рассмотрим применение метода на решении ряда задач.

### 3. Круговая арка под равномерным давлением $q$ с заделанными краями

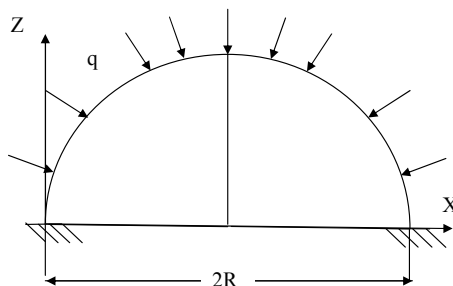


Рис. 1

Сделаем расчет малых перемещений непологой плоской круговой строительной арки радиуса  $R$  под внешним давлением  $q$ , края которой жестко заделаны (рис. 1). Арка испытывает изгиб и сжатие. Кручение отсутствует. Точное решение этой задачи имеет вид [11]:

$$u(\alpha) = \frac{2qR^2}{AB} [BR^2\alpha (1 - \cos 2\alpha_L) + \alpha_L (D + BR^2) \sin \alpha_L \alpha \cos \alpha - \alpha_L (\alpha_L (D + BR^2) \cos \alpha_L + 2BR^2 \sin \alpha_L) \sin \alpha], \quad (3.1)$$

$$A = 2(\alpha_L^2 D + (\alpha_L^2 - 1)BR^2 + BR^2 \cos 2\alpha_L) + \alpha_L (D + BR^2) \sin 2\alpha_L,$$

$$0 \leq \alpha \leq \alpha_L,$$

$$w(\alpha) = \frac{2qR^2}{AB} (D + BR^2) [\cos \alpha_L (\alpha_L \cos \alpha - \sin \alpha_L) - \alpha_L + \sin \alpha_L (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha)]. \quad (3.2)$$

Здесь в силу симметрии рассматривается половина арки,  $\alpha$  – центральный угол – отсчитывается от вершины арки,  $u(\alpha)$  – смещение по дуге  $s$ ,  $w(\alpha)$  – прогиб по внешней нормали. Индексы у жесткости опущены. При  $\alpha = \alpha_L$  выполняются условия заделки:

$$u(\alpha_L) = 0, \quad w(\alpha_L) = 0, \quad w'(\alpha_L) - u(\alpha_L) = 0. \quad (3.3)$$

Подвижный натуральный трехгранник плоской круговой арки представляет собой орт касательной к окружности, главную нормаль, направленную в центр круга и бинормаль, ортогональную к плоскости круга. Для незакрученного круга геодезическое кручение отсутствует:

$$k_{x0} = k_{20} = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{ds} = 0, \quad \varphi_0 = \pi.$$

Угол между главной нормалью естественного трехгранника  $\bar{e}_{20}$  и нормалью  $\bar{e}_{z0}$  главных осей сечения равен  $\pi$ . Поэтому в главных осях вектор кривизны входит со знаком минус:

$$\frac{d\bar{e}_{10}}{ds} = \frac{d\bar{e}_{x0}}{ds} = k_{10}\bar{e}_{20} = -\frac{\bar{e}_{z0}}{R}.$$

Дуга окружности получается движением начала координат трехгранника по дуге с постоянной скоростью и вращением его с постоянной угловой скоростью

$$k_{10} = \frac{1}{R} = \frac{\alpha}{s}.$$

Таким образом, вектор угловой скорости Дарбу направлен ортогонально плоскости арки и вращается по часовой стрелке.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть  $R = 400$  см,  $\alpha_L = \pi/2$ , толщина арки  $h = 8$  см,  $q = 20$  кг/см. Сечение – полое прямоугольное ширины  $b = 4$  см, высоты  $h = 8$  см, толщины  $t_s = 0.3$  см. Материал – сталь с модулем  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Изгибная и растягивающая жесткости вычисляются по формулам:

$$D = E I_y, \quad B = E F, \quad (3.4)$$

$$I_y = \frac{1}{12} [bh^3 - (b - 2t_s)(h - 2t_s)^3], \quad F = bh - (b - 2t_s)(h - 2t_s).$$

Представим арку в виде ломаной, состоящей из балок длиной  $L_i$ . Пусть  $n$  – число балок,  $f_i$  – угол сопряжения смежных балок в  $(i+1)$ -й вершине арки (рис. 2),  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Перемещениям, усилиям и моментам начала балки будем приписывать два индекса: первому – 0 (начальный параметр), второму – номер балки. Пересчет начальных параметров согласно рис. 2 от узла  $i$  к узлу  $i+1$ , учитывая положительные направления векторов, делаем по формулам:

$$\begin{aligned} u_{0,i+1} &= u_i(L_i) \cos(f_i) - w_i(L_i) \sin(f_i), \\ w_{0,i+1} &= w_i(L_i) \cos(f_i) + u_i(L_i) \sin(f_i), \\ T_{0,i+1} &= T_i(L_i) \cos(f_i) - Q_i(L_i) \sin(f_i), \\ Q_{0,i+1} &= Q_i(L_i) \cos(f_i) + T_i(L_i) \sin(f_i), \\ t_{0,i+1} &= t_i(L_i), \quad M_{0,i+1} = M_i(L_i). \end{aligned} \quad (3.5)$$

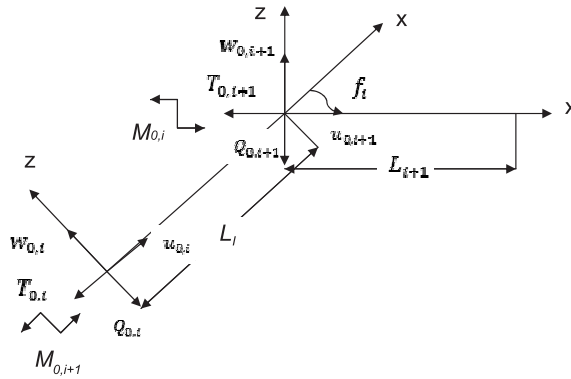


Рис. 2

Здесь статическим и геометрическим величинам каждого элемента присваивается номер. Для  $i$ -й балки уравнения (2.1), (2.2) принимают вид

$$u_i(x) = u_{0,i} + \frac{T_{0,i}}{B}x, \quad (3.6)$$

$$w_i(x) = w_{0,i} + t_{0,i}x - \frac{M_{0,i}}{2D}x^2 - \frac{Q_{0,i}}{6D}x^3 - \frac{q}{24D}x^4. \quad (3.7)$$

Угол поворота, усилия и момент в  $i$ -й балке вычисляем по формулам:

$$t_i(x) = w'_i(x), \quad T_i(x) = Bu'_i(x), \quad (3.8)$$

$$M_i(x) = -Dw''_i(x), \quad Q_i(x) = -Dw'''_i(x).$$

Так как деформации арки являются симметричными относительно ее вершины, то достаточно рассмотреть балочную схему только левой половины арки. Поэтому граничными условиями для первой и последней балок будут:

$$u_{0,1} = 0, \quad t_{0,1} = 0, \quad w_{0,1} = 0, \quad (3.9)$$

$$t_n(L_n) = 0, \quad u_n(L_n) \cos(f_i/2) - w_n(L_n) \sin(f_i/2) = 0, \\ Q_n(L_n) \cos(f_i/2) + T_n(L_n) \sin(f_i/2) = 0. \quad (3.10)$$

Примем равномерное разбиение арки на стержни одинаковой длины:

$$L_i = L = 2R \sin(f_i/2), \quad f_i = f = \frac{\pi}{2n}. \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.5) выражения (3.8) с учетом (3.6), (3.7), (3.9), организуем циклические вычисления при конкретных данных арки, меняя переменную цикла  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . После этой операции перемещения  $n$ -ой балки будут функциями неизвестных начальных параметров  $T_{0,1}$ ,  $M_{0,1}$ ,  $Q_{0,1}$ . Выполняя граничные условия симметрии арки в ее вершине (3.10), из решения уравнений при указанных выше числовых данных получим ( $n = 30$ ):

$$T_{0,1} = -7997.2 \text{ кг}, \quad M_{0,1} = 1429.5 \text{ кг} \cdot \text{см}, \quad Q_{0,1} = -212.16 \text{ кг}. \quad (3.12)$$

Вычислим вертикальную опорную реакцию  $R_0$ :

$$R_0 = -[Q_{0,1} \sin(f/2) + T_{0,1} \cos(f/2)] = 8000 \text{ кг}, \quad (3.13)$$

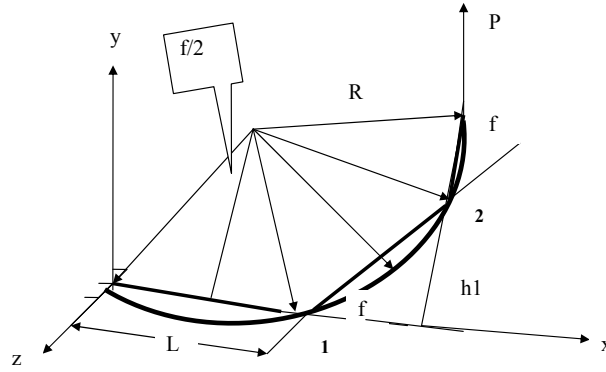


Рис. 3

что соответствует точному решению. Перемещения  $n$ -й балки, в локальной системе координат описываются уравнениями:

$$w_n(x) = -0.4475 - 7.466 \cdot 10^{-5} x - 1.492 \cdot 10^{-6} x^2 + 3.126 \cdot 10^{-7} x^3 - 7.460 \cdot 10^{-9} x^4, \quad (3.14)$$

$$u_n(x) = 0.0004986 - 0.0005844 x, \quad 0 \leq x \leq L = 20.94 \text{ см.} \quad (3.15)$$

В глобальных координатах максимальный прогиб вычисляется по значениям перемещений на конце  $n$ -й балки:

$$W_{\max} = w_n(L) \cos(f/2) + u_n(L) \sin(f/2) = -0.4485 \text{ см.} \quad (3.16)$$

Точное значение максимального прогиба, вычисленного по формуле (3.2) есть  $w(0) = -0.4485$  см. При уменьшении числа разбиения балок до  $n = 10$  прогиб равен  $W_{\max} = -0.4472$ . Такой же результат получается с помощью метода конечных элементов с тем же числом разбиений с использованием пакета ANSYS [11].

#### 4. Задача изгиба с кручением кругового стержня

Исследуем малые перемещения консольного плоского кругового стержня с радиусом кривизны  $R$ , нагруженного силой  $P$ , ортогональной плоскости круга (рис. 3). В этом случае стержень будет испытывать деформации изгиба и кручения. Поэтому деформированный стержень будет представлять собою пространственный стержень, двоякой кривизны. В рамках гипотезы нерастяжимости оси стержня Сен-Венаном и Венцелем получено точное решение этой задачи при условии  $u, w \ll v$  [12]:

$$v(\alpha) = \frac{PR^3}{D_k} [\alpha - (1 - \cos \alpha) \sin \alpha_L - \sin \alpha] + \frac{PR^3}{2} \left( \frac{1}{D_k} + \frac{1}{D_z} \right) [\alpha \cos(\alpha_L - \alpha) - \cos \alpha_L \sin \alpha], \quad (4.1)$$

$$\varphi(\alpha) = \frac{PR^2}{D_k} (\alpha - \sin \alpha_L + \sin(\alpha_L - \alpha)) - \frac{v(\alpha)}{R}, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_L. \quad (4.2)$$

Соотношения упругости для моментов при наличии всех перемещений имеют вид [12]:

$$M_x = D_k \tau, \quad M_y = D_y \kappa_y, \quad M_z = D_{yz} \kappa_z,$$



$$\tau = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{R} \frac{dv}{ds}, \quad \kappa_y = -\frac{1}{R^2} \left( w + \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \right), \quad \kappa_z = \frac{\varphi}{R} - \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Из условий статического равновесия вытекает, что

$$M_x = PR (1 - \cos(\alpha_L - \alpha)), \quad M_y = 0, \quad M_z = PR \sin(\alpha_L - \alpha).$$

Пусть сечение стержня будет прямоугольным с размерами по оси  $y$ :  $h = 8$  см, по оси  $z$ :  $b = 4$  см,  $\alpha_L = \pi/2$  – стержень в четверть круга. Другие данные:  $R = 400$  см;  $P = 20$  кг,  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>,  $G = E/2.6$  кг/см<sup>2</sup>,  $D_z = EI_z$ ,  $I_z = bh^3/12$ .

При вычислении крутильной жесткости прямоугольного сечения приходится суммировать бесконечный ряд [12]:

$$D_k = Ghb^3 \beta(c), \quad c = \frac{h}{b}, \quad \beta(c) = \frac{1}{3} - \frac{64}{c\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\text{th}(m\pi/2)}{m^5}, \quad \beta(2) = 0.2287. \quad (4.3)$$

Точные значения максимального прогиба консоли (4.1) и угла закручивания (4.2) равны

$$v(\pi/2) = 8.0074 \text{ см}, \quad \varphi(\pi/2) = 0.0002616.$$

Прогиб (4.1) складывается из прогиба от изгиба и прогиба от кручения. Интересно отметить, что вклад от кручения составляет более 60% всего прогиба. Поэтому учет кручения необходим.

Проведем приближенные вычисления этой задачи, разбивая контур стержня на  $n$  балок (рис. 3), работающих на изгиб и кручение. Произвольная балка получает прогиб и кручение:

$$v_i(x) = v_{0,i} + \theta_{0,i}x - \frac{M_{0z,i}}{2D_z}x^2 - \frac{P}{6D_z}x^3, \quad \theta_i(x) = v'_i(x), \quad (4.4)$$

$$\varphi_i(x) = \varphi_{0,i} + \frac{H_i}{D_k}x. \quad (4.5)$$

Крутящий момент  $H_i$  в пределах  $i$ -й балки считается постоянным и вычисляется следующим образом:

$$H_i = Ph_i, \quad h_i = L \sum_{k=1}^{n-1} \sin(kf), \quad h_n = 0. \quad (4.6)$$

Величины  $L$ ,  $f$  вычисляются по формуле (3.11). Из условий статики начальный изгибающий момент первого элемента равен:

$$M_{0z,1} = -PR [\cos(f/2) + \sin(f/2)]. \quad (4.7)$$

Таким образом, все начальные параметры определены. Поэтому можно использовать «прогонку» результатов на другой конец кривого стержня для получения прогиба и угла кручения. Используя граничные условия заделки для первой балки

$$v_{0,1} = 0, \quad \theta_{0,1} = 0, \quad \varphi_{0,1} = 0, \quad (4.8)$$

будем определять начальные параметры в  $(i+1)$ -й балке по данным сопряжения статики и кинематики в конце сечения  $i$ -й балки путем организации цикла от 1 до  $n-1$

$$v_{0,i+1} = v_i(L), \quad M_{0z,i+1} = M_{z,i}(L) \cos f - H_i \sin f, \quad (4.9)$$

$$\varphi_{0,i+1} = \varphi_i(L) \cos f - \theta_i(L) \sin f, \quad M_{z,i}(x) = -D_z \theta'_i(x). \quad (4.10)$$

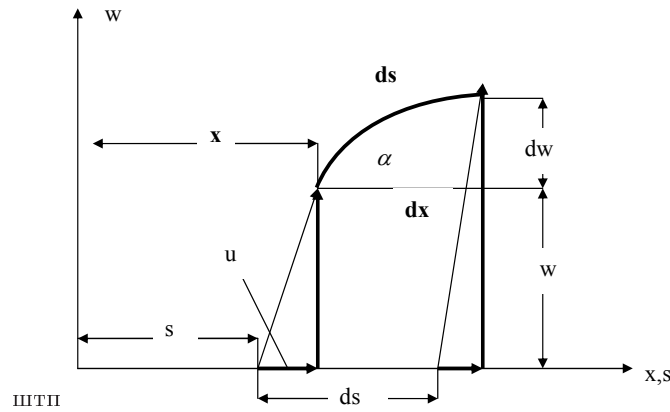


Рис. 4

Принимая  $n = 40$ , вычислим согласно (4.9), (4.10):

$$v_n(L) = 8.0027, \quad \varphi(\pi/2) = \varphi_n(L) \cos(f/2) - \theta_n(L) \sin(f/2) = 0.0002572.$$

При увеличении вдвое числа разбиений стержня удается снизить погрешность по прогибам до 0.01%, по углу закручивания – до 0.4%.

## 5. Изгиб пластины в трубу

Поставим задачу о сгибе тонкой пластинки (стержня) в цилиндрическую оболочку (кольцо) при помощи моментов. Деформации считаем упругими, а перемещения и углы поворота – произвольными. Точное решение этой нелинейной проблемы впервые было получено Лурье [13] в предположении несжимаемости полосы. Затем она стала тестом численного решения нелинейных задач изгиба оболочек [14], где получено приближенное решение МКЭ с погрешностью 3.5% при разбиении пластины на 20 элементов и 300 шагов нагружения. Ученик Филина Чинарян методом начальных параметров численно получил решение при небольшом изгибе в цилиндрическую панель (разбиение балки на 20 элементов и 16 шагов нагружения) с серьезной погрешностью – арифметическая ошибка допущена даже при вычислении точного решения [10]. Филин в книге [10] приводит формулу балочного точного решения без ссылки и объяснений. Получим это точное решение, в котором содержится неожиданный результат: выведена формула кривизны плоской кривой в лагранжевом описании движения упругого стержня!

Введем материальную (лагранжеву) систему отсчета  $s$  горизонтального стержня (рис. 4). В результате деформации плоский элемент  $ds$  перейдет в дугу  $ds$  (предполагается нерастяжимость стержня). Тогда начало элемента попадет в точку плоскости  $(x, w)$ , где  $x$  – пространственная (эйлерова) система отсчета,  $w$  – прогиб балки. Связь между пространственными и материальными координатами и их приращениями дается формулами:

$$x = s + u, \quad dx = ds + du, \quad (5.1)$$

где  $u$  – горизонтальное перемещение элемента. Обозначим через  $R$  радиус кривизны дуги стержня. Тогда кривизна будет равна:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \kappa = \frac{1}{R}. \quad (5.2)$$

Для криволинейного треугольника имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \sin \alpha = \frac{dw}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}. \quad (5.3)$$

Перемещения могут быть функциями пространственных координат (эйлерово описание движения) либо материальных координат (лагранжево описание движения). Согласно (5.1)

$$\frac{dx}{ds} = 1 + \frac{du}{ds}, \quad \frac{ds}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}. \quad (5.4)$$

Дифференцируя (5.3), получаем:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{d^2w}{dx^2} \cos^2 \alpha, \quad \kappa = \frac{d^2w}{dx^2} \cos^3 \alpha. \quad (5.5)$$

Так как  $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , получаем известную формулу для кривизны нерастяжимой балки при произвольных поворотах сечения в эйлеровом описании деформаций:

$$\kappa = \frac{1}{R} = - \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (5.6)$$

Из (5.3), (5.4) следует  $\frac{d^2w}{ds^2} = \cos \alpha \frac{d\alpha}{ds}$ . Откуда находим выражение кривизны балки в лагранжевом описании ее произвольного изгиба:

$$\kappa = \frac{1}{R} = - \frac{\frac{d^2w}{ds^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2}} = \frac{M}{D}. \quad (5.7)$$

Знак минус выбран потому, что  $d\alpha < 0$  (выпуклость вверх при положительном моменте по часовой стрелке). Дифференциальное уравнение для горизонтальных смещений определим из (5.3), (5.4):

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{ds}\right)^2} - 1. \quad (5.8)$$

Интегрируя (5.7) при  $M = \text{const} < 0$ ,  $w(0) = 0$ ,  $w'(0) = 0$ , получим (рис. 5):

$$w(s) = R(1 - \cos \alpha(s)), \quad s = R\alpha(s). \quad (5.9)$$

Интеграл уравнения (5.8) при  $u(0) = 0$  с учетом (5.9) дает:

$$u(s) = x - s = R \sin \alpha(s) - s < 0, \quad \alpha(s) = Ms/D. \quad (5.10)$$

Уравнения (5.9), (5.10) описывают параметрически циклоиду. Отсюда следует математическая аналогия: перемещения любой точки балки получаются путем качения подвижной центроиды (круга радиуса  $R$ ) по неподвижной центроиде (плоскости). Причем качение ведется без скольжения из точки опоры стержня с постоянной угловой скоростью, плотно прижимая балку к кругу, до тех пор, пока круг не совершит полный оборот. При этом все материальные точки стержня лягут влево

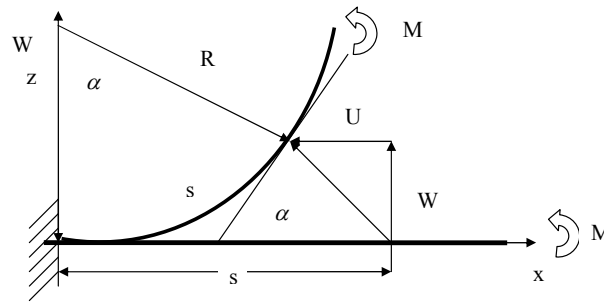


Рис. 5

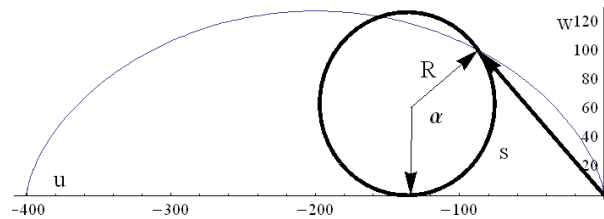


Рис. 6

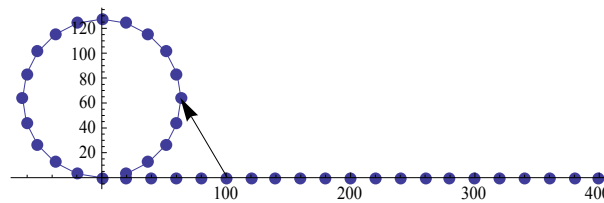


Рис. 7

от опоры на циклоиду, а стержень примет ее форму. Если длина стержня равна  $S$ , то изгибающий момент вычисляется по формуле  $M = 2\pi D/S$ , а радиус круга:  $R = S/2\pi$ . Решение справедливо при предельно упругом моменте. Откуда полутолщина балки  $z \leq \sigma_t I_y / M$  ( $\sigma_t$  – напряжения текучести материала). Для нашего примера этот диапазон равен:  $0.07 \text{ см} < z < 0.13 \text{ см}$  (малоуглеродистая сталь),  $z < 0.36 \text{ см}$  (высокопрочная сталь)

Пусть стержень обладает следующими механическими и геометрическими характеристиками [10]:  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $I_y = 712 \text{ см}^4$ ,  $S = 400 \text{ см}$ . Тогда момент, позволяющий согнуть стержень в кольцо, равен  $M = 23681 \cdot 10^7 \text{ кг·см}$ . Радиус кольца будет равен  $R = 63.662 \text{ см}$ . На рис. 6 показано получение циклоиды путем качения колеса по горизонтальной прямой.

На рис. 7 изображены материальные точки балки, находящиеся до изгиба и перемещающиеся в результате изгиба на окружность в эйлеровой системе координат.

Проведем приближенный расчет произвольных прогибов консольной пластины под действием изгибающего момента  $M$ , сворачивающего ее в трубу радиуса  $R$ . Разобьем балку на конечное число элементов. Известно, что любое перемещение точек деформированного тела представляет собой упругие перемещения и жесткое смещение как твердого тела. Если деформации малы, а перемещения большие, то основной вклад в большие перемещения дают жесткие смещения. Поэтому при сильном изгибе можно рассмотреть малые перемещения и повороты элемента

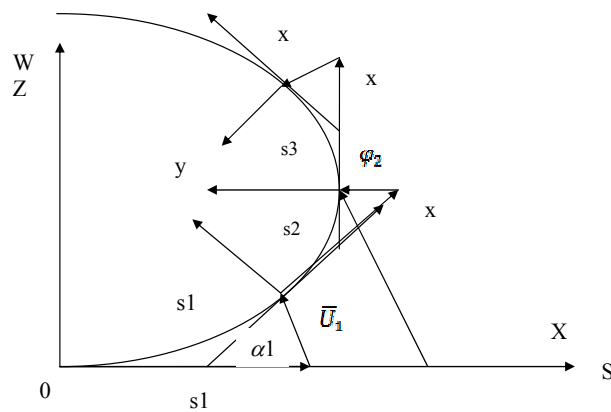


Рис. 8

балки в локальной системе координат, пристраивая к ней соседнюю балку и совершая с ней жесткий поворот на угол конца первой балки. Продолжая процесс по всем элементам получим требуемые повороты и смещения. Заметим, что упругие перемещения в локальных координатах являются одними и теми же. Ряд авторов считают [10, 14], что в этой задаче линейный процесс зависит как от малых поворотов (длины элемента), так и от малых нагрузжений. Наше мнение заключается в том, что все зависит от малых поворотов, а нагрузка является аргументом в функциях, задающих углы поворотов. Поэтому сначала надо задаться конечной нагрузкой и по ней вычислить наименьший угол поворота, затем по нему подобрать количество элементов, по которому можно итерировать приближения. Итерацию последовательных нагружений проводить здесь не нужно, так как начальные параметры в этой задаче полностью определяются. По-другому обстоит дело для задачи изгиба консоли силой, при этом в процессе деформаций нельзя определить начальные параметры в заделке, например, в случае «мертвой» нагрузки или следящей силы. В этом случае необходимо разбивать расчет на малые шаги как по геометрии стержня, так и по его нагружению.

Подберем начальное приближенное решение изгиба элемента балки, раскладывая в ряд Тейлора точное решение (5.9), (5.10) и ограничиваясь двумя членами ряда (второе приближение):

$$w(\alpha) \approx \frac{R\alpha^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{12}\right), \quad u(\alpha) \approx -\frac{R\alpha^3}{6} \left(1 - \frac{\alpha^2}{20}\right). \quad (5.11)$$

Для малых поворотов  $\alpha \ll 1$  в (5.11) следует взять одночленное балочное приближение (первое приближение), причем можно считать  $u(\alpha) \approx 0$  (нулевое приближение).

Введем неподвижные глобальные оси координат  $X, Z$  с началом в опоре стержня и локальные подвижные оси  $x, z$ , связанные с элементарными балками длины  $s_i$ , аппроксимирующими конечное положение деформированного стержня (рис. 8). Начало координат каждой локальной оси поместим в конец деформированного элемента. Причем относительный поворот локальных осей известен. Он равен углу поворота конца предыдущего элемента  $\alpha_i$ . Относительные малые перемещения в локальной системе координат конца  $i$ -го элемента будем обозначать через  $u_i, w_i$ , они вычисляются по формулам (5.11). В глобальных координатах узловые перемещения запишем большими буквами  $U_i, W_i$ . Переменный индекс меняется в пределах  $i = 1, 2, \dots, n$  слева от опоры. Деформацию балки, состоящей из  $n$

Табл. 1

№ точки	2	4	5	7	10
$W_k$ по 1 приближению	44.70	115.8	127.6	82.88	0
$W_k$ точное	43.99	115.2	127.3	83.33	0
$U_k$ по 1 приближению	-19.79	-123.7	-201.3	-341.5	-400
$U_k$ точное	-19.45	-122.6	-200	-340.5	-400

элементов, будем получать последовательно, изгибая по одному элементу. Затем, зная перемещения и угол поворота конца сечения первого элемента, деформируем как консоль второй элемент. В локальных координатах это будут известные перемещения приближенного решения. Теперь для того чтобы получить в глобальных координатах смещения конца второго элемента, необходимо добавить к смещению концов первого элемента проекции смещения второго элемента в локальных координатах с учетом жесткого поворота элемента на угол  $\alpha_i$ . Поэтому задача сведется к проектированию векторов перемещений в узлах с учетом жесткого поворота на глобальные оси. Глобальные перемещения в конце  $k$ -го элемента будут представлены выражениями:

$$W_k = w_1 + \sum_{i=2}^k \left\{ (s_k + u_k) \sin \varphi_{k-1} + w_k \sin(\varphi_{k-1} + \frac{\pi}{2}) \right\}, \quad (5.12)$$

$$U_k = u_1 + \sum_{i=2}^k \left\{ u_k \cos \varphi_{k-1} + w_k \cos \left( \varphi_{k-1} + \frac{\pi}{2} \right) - s_k (1 - \cos \varphi_{k-1}) \right\}, \quad (5.13)$$

где

$$\varphi_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i,$$

$s_1$  – длина первого элемента,  $\alpha_1$  – угол поворота упругой линии конца первого элемента,  $\varphi_k$  – глобальный угол поворота в  $k$ -м узле. Если разбить стержень на  $n$  равных элементов, то

$$\varphi_k = k\alpha_1, \quad s_1 = s_2 = \dots = s_n = S/n, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 2\pi/n.$$

Примем  $n = 10$  для равномерного разбиения. Такое разбиение дает  $\alpha_1 = 0.2\pi$ , что приводит к значениям перемещений конца первого элемента по точным формулам и формулам второго приближения к разнице в четвертом знаке. Причем накопление ошибок не происходит при прогоне узлов от 1 до 10 при вычислении (5.9), (5.10), (5.12), (5.13) с учетом (5.11). Поэтому приближенное решение на базе начального второго приближения можно считать практически точным. Но этот случай не является столь интересным, хотя подтверждает выдвинутую нами гипотезу о жестком повороте. Второе начальное приближение является следствием знания точного решения. Более интересным является балочное приближение (первое начальное приближение), основанное на линейном решении изгиба балки. Результаты вычислений приближенного и точного решений приведены в табл. 1.

Пятая точка недеформированного стержня попадает в вершину трубы (кольца). Погрешность в этой точке по прогибу составляет около 0.2%, по горизонтальному смещению – около 0.7%. Нулевое начальное приближение в этой точке имеет погрешность порядка 7% по прогибам и 0.7% по горизонтальным перемещениям. Понятно, что в этом случае для повышения точности результатов следует увеличить число элементов.

### Заключение

Рассмотренные примеры расчета деформаций криволинейных стержней свидетельствуют о высокой точности предложенного приближенного способа. Можно надеяться, что расчет более сложных конфигураций пространственных стержней, не имеющих точных решений, также даст неплохие результаты.

### Summary

*Yu. P. Artyukhin.* An Approximate Analytical Method for Studying Deformations of Spatial Curvilinear Beams.

The article proposes an analytical method for elastic analysis of curvilinear beams of double curvature. The method is based on initial parameters and is suitable for arbitrary turning angles and deflections.

**Key words:** elasticity, double curvature, initial parameter, big deflections.

### Литература

1. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
2. Лурье А.И. О малых деформациях криволинейных стержней // Труды Ленингр. политехн. ин-та. – 1941. – № 3. – С. 148–157.
3. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 170 с.
4. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 222 с.
5. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 1: Статика. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 2: Динамика. – М.: Высш. шк., 1987. – 304 с.
7. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малитин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. – М.: Машгиз, 1959. – 1118 с.
8. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 616 с.
9. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования колебаний пружин // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – 1962. – Вып. 27. – С. 119–134.
10. Полищук Д.Ф. Обобщенная теория цилиндрических пружин. – Ижевск: Удмурт. гос. ун-т, 1992. – 209 с.
11. Артюхин Ю.П. Строительная механика в пакетах “MATHEMATICA” и “ANSYS”. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – 120 с.
12. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – Киев: Наукова думка, 1972. – 508 с.
13. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
14. Голованов А.И., Песошин А.В., Тюленева О.Н. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. – 440 с.

Поступила в редакцию  
04.04.12

---

**Артюхин Юрий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета,  
E-mail: JArtyuhi@ksu.ru